

# Un trou spectral certifié

$\lambda_1 > 1/4$  pour tous les genres de 2 à 101

Abdelkader BOUSABAA

18 août 2026

## Résumé

On établit  $\lambda_1 > 1/4$  pour une surface hyperbolique fermée de chaque genre de 2 à 101, avec pour chacune une borne inférieure explicite. Le seuil  $1/4$  n'était atteint de façon déterministe qu'aux genres 2–7, 14 et 17 (Fortier Bourque–Petri). La méthode n'est pas celle de la formule des traces : elle calcule  $\lambda_1$  et le certifie, par éléments finis non conformes de Crouzeix–Raviart posés dans le *modèle de Klein*, où les géodésiques sont des cordes droites et les triangles hyperboliques des triangles euclidiens convexes. Trois ingrédients rendent la chose praticable : un encadrement de Loewner des coefficients métriques, du premier ordre en la taille hyperbolique et uniforme jusqu'au bord ; une constante d'interpolation explicite,  $\kappa = \sqrt{2/\pi^2 + 1/\pi}$  ; et une réduction par les caractères d'un sous-groupe cyclique du groupe de revêtement, qui divise la mémoire par son ordre. Le dernier maillon flottant est levé par l'inertie de Sylvester. On consigne aussi, avec leurs causes chiffrées, trois pistes de la voie « formule des traces » mesurées et réfutées, et une erreur de méthode.

## 1 Introduction

### 1.1 Contexte

La question du trou spectral des surfaces hyperboliques se travaille aujourd'hui dans trois communautés qui se citent peu, et l'article se place dans l'écart entre elles.

La première est *probabiliste*. Depuis Mirzakhani [13], qui tirait  $\lambda_1 \gtrsim 0,002$  de l'inégalité de Cheeger sur le modèle de Weil–Petersson, la borne a monté par paliers :  $3/16 - \varepsilon$  chez Wu–Xue [18] et, indépendamment, Lipnowski–Wright [12], puis  $1/4 - \varepsilon$  chez Anantharaman–Monk [1]. Du côté des revêtements aléatoires, Hide–Magee [9] atteignent  $1/4 - \varepsilon$  sur base non compacte et Magee–Puder–van Handel [17] ferment le cas compact ; Hide–Macera–Thomas [10] donnent le taux  $1/4 - O(g^{-c})$ . Les deux panoramas récents, celui de Monk–Naud [14] et l'exposé Bourbaki de Petri [20], en dressent l'état. Il faut noter que l'inégalité de Cheeger ne peut pas mener au-delà : Budzinski–Curien–Petri montrent que la constante de Cheeger d'une surface de grand genre ne dépasse pas  $1/\pi^2$  [2], ce qui plafonne  $\lambda_1$  obtenu par cette voie bien en dessous de  $1/4$ .

La deuxième est *arithmétique*. La conjecture de Selberg [22] prédit  $\lambda_1 \geq 1/4$  pour les surfaces modulaires de congruence ; le record est 975/4096, dû à Kim et Sarnak [11], et des vérifications numériques la confirment à petit niveau [3].

La troisième est *déterministe et en genre fixé*, et c'est celle d'ici. Otal–Rosas [19] y donnent  $\lambda_{2g-2} > 1/4$ , optimal en rang mais muet sur  $\lambda_1$ . Fortier Bourque–Petri [8] y construisent une borne de programmation linéaire à la Cohn–Elkies sur la formule des traces et en tirent  $\lambda_1 > 1/4$  à huit genres. Du côté des bornes supérieures, Kravchuk–Mazáč–Pal [15] approchent  $\lambda_1$  de la surface de Bolza à cinq décimales par bootstrap conforme, ce que le calcul de Strohmaier–Uski [23] avait établi numériquement.

L'article emprunte à une quatrième littérature, qui n'apparaît dans aucune des trois : l'*analyse numérique certifiée*. Les éléments non conformes de Crouzeix–Raviart [6] servent ici non à approcher une valeur propre mais à la *minorer* rigoureusement, par le théorème de Carstensen–Gedicke [5], dont l'ingrédient d'interpolation repose sur l'inégalité de Payne–Weinberger [21]. Les surfaces sont prises dans la liste

de quotients de groupes triangulaires de Conder [7], et la borne sur la systole disponible est celle de Buser–Sarnak [4].

## 1.2 Le seuil

Soit  $X$  une surface hyperbolique fermée de genre  $g \geq 2$  et  $\lambda_1(X)$  la première valeur propre non nulle de son laplacien. Le nombre  $1/4$  y joue le rôle d’un seuil, pour une raison spectrale et non métrique :  $1/4$  est le bas du spectre  $L^2$  du plan hyperbolique, et c’est le point où le paramètre  $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$  passe du réel à l’imaginaire pur. Les valeurs propres sous  $1/4$  s’écrivent  $\lambda = \frac{1}{4} - y^2$  avec  $y \in (0, \frac{1}{2}]$  ; ce sont elles, et elles seules, qui font diverger les sommes spectrales de la formule des traces. Du côté arithmétique, la conjecture de Selberg affirme  $\lambda_1 \geq 1/4$  pour les surfaces modulaires de congruence ; le meilleur résultat connu,  $975/4096 = 0,23803\dots$ , est celui de Kim et Sarnak [11] et n’a pas bougé depuis vingt-trois ans.

## 1.3 État de l’art

Il faut distinguer trois questions que le même nombre recouvre.

*Le  $1/4$  aléatoire est tombé.* Pour les revêtements aléatoires, Hide–Magee [9] puis Magee–Puder–van Handel [17] atteignent  $1/4 - \varepsilon$ , y compris sur base compacte. Pour le modèle de Weil–Petersson, Anantharaman–Monk [1] obtiennent  $\lambda_1 \geq 1/4 - \varepsilon$  avec probabilité tendant vers 1, et Hide–Macera–Thomas [10] un taux  $1/4 - O(g^{-c})$  dont l’exposant  $c > 0$  n’est pas explicité.

*Le  $1/4$  arithmétique reste.* C’est la conjecture de Selberg, dont le verrou est  $\text{Sym}^5$  pour les formes de Maass.

*Le  $1/4$  déterministe, en genre fixé, est celui qui nous occupe.* Otal–Rosas [19] donnent  $\lambda_{2g-2} > 1/4$ , ce qui est optimal en rang mais ne dit rien de  $\lambda_1$ . Fortier Bourque et Petri [8] construisent une borne de programmation linéaire à la Cohn–Elkies sur la formule des traces, et en tirent  $\lambda_1 > 1/4$  aux genres 2–7, 14 et 17 — à notre connaissance le seul résultat déterministe de cette forme. Leur borne ne lit de la surface que deux nombres : le genre et la systole.

## 1.4 Résultat

**Théorème 1.** *Pour chaque genre  $g$  avec  $2 \leq g \leq 101$ , il existe une surface hyperbolique fermée  $X_g$  de genre  $g$ , explicitement décrite comme quotient d’un groupe triangulaire, telle que  $\lambda_1(X_g) > 1/4$ . Les bornes inférieures obtenues, toutes certifiées, figurent au tableau 1 ; la plus faible vaut 0,263201 (genre 95) et la médiane 0,4414.*

Chaque surface est donnée par une action triangulaire de la liste `TriangleGroupQuotients101` de Conder [7], reconstruite indépendamment par Todd–Coxeter et vérifiée (ordre du groupe, ordres des générateurs, aire et signature du complexe recollé).

## 1.5 Discipline

On sépare partout trois statuts : ce qui est démontré sans modèle, ce qui dépend d’un calcul flottant nommé, et ce qui a été mesuré puis réfuté. Les pistes abandonnées sont publiées avec leurs causes chiffrées (§6) et les rétractations numérotées (§7) ; chaque nombre de l’article se régénère à partir d’un script nommé.

## 2 Deux voies, et pourquoi la seconde l'emporte

### 2.1 La voie de la formule des traces

La borne de Fortier Bourque–Petri s'obtient en choisissant une fonction test  $f$  paire avec  $\hat{f} \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\hat{f}(iy) \geq 1$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , et  $f \leq 0$  au-delà de la systole  $R$ ; la somme géodésique de la formule des traces est alors négative et on la *jette*, d'où

$$N_{[0,1/4]} \leq v(g, R) + 1, \quad v(g, R) = 2(g-1) \int_0^\infty \hat{f}(x) x \tanh(\pi x) dx - \hat{f}(i/2).$$

Le certificat est  $v < 1$ . Nous avons reconstruit ce programme linéaire et étalonné notre banc sur leur tableau 7.

**Amplification par multiplicité.** Si  $G$  agit sur  $X$  par isométries et si  $\lambda_1(X/[G, G]) > 1/4$ , aucune valeur propre de  $(0, 1/4]$  ne peut vivre dans une représentation de dimension 1; toute valeur propre intrusive a donc multiplicité au moins  $d_{\min}$ , le plus petit degré non linéaire de  $G$ . Le certificat devient  $v < d_{\min}$ . Ce transport élargit sensiblement la portée de la borne : il a fourni les genres 8–40.

### 2.2 Le plafond, mesuré

Cette voie a un plafond, et nous l'avons chiffré plutôt que supposé. La borne ne lit que  $(g, R)$ , et la systole disponible croît comme  $\frac{4}{3} \log g$  [4] tandis que le seuil requis croît comme  $2 \log g$ . L'écart se comble par l'amplification, qui rabat le seuil de  $1,46 \log d_{\min}$ ; il faudrait  $d_{\min} \gtrsim g^{0,46}$  quand les groupes disponibles fournissent  $d_{\min} \sim |G|^{1/3} \sim g^{1/3}$ .

Le point décisif est ailleurs. **La systole est un mauvais indicateur du trou spectral.** Au genre 38, à résolution égale et en géométrie exacte, l'action T38.6 de systole 6,364 donne  $\lambda^{\text{CR}} = 0,256$  et l'action T38.21 de systole 4,917 donne 0,259 : une systole plus courte d'un et demi, un trou spectral égal. Sur les onze actions du genre dont la systole est calculable, la corrélation entre systole et  $\lambda_1$  vaut +0,74 : réelle, mais loin d'une correspondance terme à terme. Le programme optimisait la systole parce que c'est la seule chose que le certificat lit — l'outil imposait la cible.

### 2.3 La voie certifiée

D'où le renversement : au lieu de tester une condition suffisante action par action, calculer  $\lambda_1$  de chaque surface, puis certifier la gagnante. Le balayage devient immédiat et le verdict change de nature. Aux genres 23 et 38, que la voie précédente ne réglait pas, 19 des 44 actions du premier et 14 des 62 du second ont une borne certifiée supérieure à  $1/4$  dès un maillage grossier — et ce sont des minorants du vrai compte : les surfaces convenables abondaient, le certificat ne pouvait pas les voir.

## 3 La borne inférieure certifiée

Les éléments finis conformes *majorent* les valeurs propres : ils ne démontrent rien. Les éléments non conformes de Crouzeix–Raviart les *minorant*, à une correction explicite près [5]. Mais le théorème usuel porte sur le laplacien à coefficients constants d'un domaine *polygonal* du plan, et rien de cela n'est vrai ici. Trois obstacles, trois réponses.

### 3.1 Pourquoi le modèle de Klein

Dans le disque de Poincaré la métrique est conforme, donc l'énergie est euclidienne : c'est commode. Mais les côtés d'un triangle hyperbolique y sont des *arcs*, et un maillage polygonal ne recouvre pas le domaine ;

pire, un triangle hyperbolique y est **non convexe** au sens euclidien — il est borné par des arcs bombant vers l'intérieur — de sorte que l'inégalité de Payne–Weinberger, qui exige la convexité, tombe.

Dans le modèle de Klein les géodésiques sont des **cordes droites**. Un triangle hyperbolique y est un vrai triangle euclidien, convexe, et une triangulation géodésique en est une triangulation euclidienne *exacte*. L'erreur de bord disparaît entièrement. Le prix est que la métrique n'est plus conforme :

$$g_{ij} = \frac{(1-r^2)\delta_{ij} + x_i x_j}{(1-r^2)^2}, \quad \sqrt{g} = (1-r^2)^{-3/2}, \quad g^{ij} = (1-r^2)(\delta_{ij} - x_i x_j),$$

d'où, pour la forme d'énergie et la forme de masse,

$$A(x) = \sqrt{g} g^{-1} = \frac{I - x x^\top}{\sqrt{1-r^2}}, \quad \rho(x) = \sqrt{g} = \cosh^3 d(0, x),$$

avec  $\det A \equiv 1$  et pour valeurs propres  $\sqrt{1-r^2} = \operatorname{sech} d$  (radiale) et  $1/\sqrt{1-r^2} = \cosh d$  (tangentielle).

### 3.2 L'encadrement de Loewner

Le théorème de Crouzeix–Raviart repose sur une orthogonalité qui exige que le coefficient  $A$  soit *constant par élément*. On le remplace donc par un minorant constant. Si  $\tilde{A} \preceq A$  et  $\tilde{\rho} \geq \rho$  ponctuellement, le principe du min-max donne  $\lambda_k(A, \rho) \geq \lambda_k(\tilde{A}, \tilde{\rho})$ .

Le choix naïf  $\tilde{A} = \lambda_{\min}(A) I$  perdrait un facteur  $1/(1-r^2)$ , qui explose au bord. Le calcul exact l'évite.

**Proposition 2** (perte du premier ordre, uniforme en position). *Pour tous  $x, y$  du disque de Klein à distance hyperbolique  $\delta$ ,*

$$A(y) \succcurlyeq e^{-\sqrt{2}\delta} A(x).$$

*Démonstration.* En coordonnées polaires hyperboliques  $(d, \theta)$  centrées à l'origine,  $A = \exp S$  avec  $S = -\log(\cosh d) M(2\theta)$ , où

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

est de norme de Frobenius  $\sqrt{2}$ . L'espace des matrices symétriques définies positives de déterminant 1 est  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ , modèle de  $\mathbb{H}^2$  muni de la métrique de Frobenius, de courbure  $-\frac{1}{2}$ ; la distance de  $I$  à  $\exp S$  y vaut  $\|S\|_F$ . L'application  $x \mapsto A(x)$  s'y lit donc en polaires  $(R, \Theta) = (\sqrt{2} \log \cosh d, 2\theta)$ , la métrique d'arrivée étant  $dR^2 + 2 \sinh^2(R/\sqrt{2}) d\Theta^2$ .

Or  $dR = \sqrt{2} \tanh d \, dd$ , et, comme  $\sinh(\log \cosh d) = \sinh^2 d / (2 \cosh d)$ ,

$$2 \sinh^2(R/\sqrt{2}) d\Theta^2 = 8 \frac{\sinh^4 d}{4 \cosh^2 d} d\theta^2 = 2 \frac{\sinh^4 d}{\cosh^2 d} d\theta^2.$$

Rapportés à la métrique source  $dd^2 + \sinh^2 d \, d\theta^2$ , les deux facteurs d'étirement, radial et tangentiel, valent tous deux  $\sqrt{2} \tanh d$  : l'application est conforme, de facteur  $\leq \sqrt{2}$ . D'où  $\delta_R(A(x), A(y)) \leq \sqrt{2} d_{\mathbb{H}}(x, y)$ , où  $\delta_R$  est la distance riemannienne sur les matrices définies positives. Comme  $\|\log(A^{-1/2} B A^{-1/2})\|_2 \leq \|\cdot\|_F = \delta_R(A, B)$ , on conclut.  $\square$

**Remarque 3.** C'est ce qui rend le modèle de Klein utilisable jusqu'au bord : la perte est du premier ordre en la taille *hyperbolique* de l'élément, uniformément en position, alors qu'une estimation euclidienne naïve la ferait croître comme  $1/(1-r^2)$ . On prend  $\tilde{A}_E = e^{-\sqrt{2}\delta_E} A(x_E)$ , où  $x_E$  est le barycentre de Minkowski et  $\delta_E$  le rayon hyperbolique de l'élément (le maximum sur un élément convexe est atteint en un sommet). Pour  $\rho$ , une majoration exacte par sous-élément suffit ;  $\rho$  croît avec  $|x|$ , donc son maximum sur un triangle est en un sommet, et la perte devient  $O(\delta/2^m)$  avec  $m$  sous-divisions.

### 3.3 La constante d'interpolation

**Proposition 4.** Soient  $T$  un triangle de diamètre  $h$  et  $w \in H^1(T)$  de moyenne nulle sur au moins une arête. Alors

$$\|w\|_{L^2(T)} \leq \kappa h \|\nabla w\|_{L^2(T)}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}} = 0,721770 \dots$$

*Démonstration.* Soit  $\bar{w}$  la moyenne de  $w$  sur  $T$  et  $u = w - \bar{w}$ . Le triangle étant convexe, Payne–Weinberger [21] donne  $\|u\| \leq (h/\pi) \|\nabla w\|$ .

Soit  $e_1$  l'arête de moyenne nulle et  $P_1$  le sommet opposé. Le champ  $x \mapsto x - P_1$  vérifie  $(x - P_1) \cdot n = 0$  sur les deux arêtes issues de  $P_1$  (un point d'une telle arête a  $x - P_1$  parallèle à l'arête) et  $(x - P_1) \cdot n = d_1 = 2|T|/|e_1|$ , constant, sur  $e_1$ . Le théorème de la divergence appliqué à  $u^2(x - P_1)$  donne alors

$$d_1 \int_{e_1} u^2 ds = 2 \int_T u^2 + 2 \int_T u (x - P_1) \cdot \nabla u \leq 2\|u\|^2 + 2h\|u\| \|\nabla u\|.$$

Comme  $\int_{e_1} w = 0$ , on a  $\bar{w} = -|e_1|^{-1} \int_{e_1} u$ , donc  $|\bar{w}|^2 \leq |e_1|^{-1} \|u\|_{L^2(e_1)}^2 \leq |T|^{-1} (\|u\|^2 + h\|u\| \|\nabla u\|)$ , soit  $|\bar{w}|^2 \leq |T|^{-1} h^2 (\pi^{-2} + \pi^{-1}) \|\nabla w\|^2$ . Enfin  $\|w\|^2 = \|u\|^2 + |T| \bar{w}^2 \leq h^2 (2\pi^{-2} + \pi^{-1}) \|\nabla w\|^2$ .  $\square$

**Remarque 5.** La constante optimale connue pour l'interpolation de Crouzeix–Raviart vaut 0,1893 ; celle-ci lui est 3,8 fois supérieure, et c'est sans effet : le terme correctif  $C^2 \lambda$  vaut au plus  $10^{-1}$  sur nos maillages les plus grossiers et  $10^{-3}$  sur les autres. On a préféré une constante dérivée ici à une constante citée.

### 3.4 Le théorème

**Théorème 6** (borne inférieure certifiée). Soient  $\tilde{A}$  constante par élément avec  $\tilde{A} \preccurlyeq A$ , et  $\tilde{\rho} \geq \rho$ . Soit  $\lambda_k^{\text{CR}}$  la  $k$ -ième valeur propre du problème de Crouzeix–Raviart associé. Alors, avec  $C^2 = \max_E \tilde{\rho}_{\max}(E) \kappa^2 h_E^2 / \tilde{a}_E$  où  $\tilde{a}_E = \lambda_{\min}(\tilde{A}_E)$  et  $h_E$  est le diamètre euclidien,

$$\lambda_k \geq \frac{\lambda_k^{\text{CR}}}{1 + C^2 \lambda_k^{\text{CR}}}.$$

*Esquisse.* Soit  $I$  l'opérateur d'interpolation de Crouzeix–Raviart, qui apparie les moyennes d'arête. Deux faits :  $\nabla_h I v$  est la projection  $L^2$  de  $\nabla v$  sur les constantes par élément, d'où  $a_h(v - I v, w_h) = 0$  pour tout  $w_h$  de l'espace CR — c'est ici, et seulement ici, qu'il faut  $\tilde{A}$  constante par élément ; et  $\|v - I v\|_{\tilde{\rho}} \leq C \|v - I v\|_{a_h}$  par la proposition 4. Pour  $v$  dans l'espace engendré par les  $k$  premières fonctions propres, normalisé par  $\|v\|_{\tilde{\rho}} = 1$ , en posant  $\alpha = a(v, v) \leq \lambda_k$  et  $\beta = \|v - I v\|_{a_h}^2$ , le quotient de Rayleigh de  $I v$  vaut au plus  $(\alpha - \beta)/(1 - C\sqrt{\beta})^2$ . La maximisation en  $\beta$  a pour optimum  $\beta = C^2 \alpha^2$  et pour valeur  $\alpha/(1 - C^2 \alpha)$ . Le min-max donne  $\lambda_k^{\text{CR}} \leq \lambda_k/(1 - C^2 \lambda_k)$ , d'où l'énoncé.  $\square$

### 3.5 La réduction par symétrie

Le groupe de revêtement  $W = \Delta/K$  agit simplement transitivement sur les  $2|G|$  tuiles du pavage de  $X$  par le triangle de référence. Soit  $C = \langle c \rangle \subset W$  cyclique d'ordre  $m$ .

**Proposition 7.**  $L^2(X) = \bigoplus_{j=0}^{m-1} L_j^2$  avec  $L_j^2 = \{u : u(cx) = \overline{\chi_j(c)} u(x)\}$ , chaque  $L_j^2$  est préservé par le laplacien, et une fonction de  $L_j^2$  est déterminée par sa restriction à  $2|G|/m$  tuiles, les recollements portant la phase  $\overline{\chi_j(c)}^k$ . En particulier  $\text{spec}(X) = \bigcup_j \text{spec}(L_j^2)$ , et le théorème 6 s'applique composante par composante :  $\lambda_1(X) \geq \min_j \lambda_{1,j}^{\text{CR}}/(1 + C^2 \lambda_{1,j}^{\text{CR}})$ , la fonction constante vivant dans  $L_0^2$ .

Le travail total est inchangé ; ce qui change est la complexité. Le coût d'une factorisation creuse croît comme  $n^{3/2}$ , donc découper en  $m$  morceaux divise le temps par  $\sqrt{m}$  et la mémoire par  $m$ . Au genre 48, avec  $m = 50$ , cela ramène 307 200 inconnues à 6 144.

Que le théorème survive à la torsion n'est pas un hasard : ses deux ingrédients, l'orthogonalité et l'estimation d'interpolation, sont *locaux à l'élément*. La torsion ne touche qu'aux recollements.

**Deux détails.** L’union-find des recollements devient un *union-find à phases* : une holonomie non triviale sur un cycle force le degré de liberté à zéro. Et l’inertie se fait sur la réalifiée :  $K = A + iB$  ( $A$  symétrique,  $B$  antisymétrique) devient  $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ , réelle symétrique, dont chaque valeur propre est doublée.

### 3.6 L’inertie de Sylvester

$\lambda_1^{\text{CR}} > \mu$  équivaut à ce que  $K - \mu M$  n’ait qu’une seule valeur propre négative, celle de la fonction constante. Par la loi d’inertie, il suffit de compter les pivots négatifs d’une factorisation  $LDL^T$  ; on la conduit en mode symétrique sans pivotement partiel, en vérifiant que la permutation des lignes est celle des colonnes. La valeur propre calculée en virgule flottante est ainsi remplacée par un  $\mu$  légèrement inférieur, certifié.

**Réserve 8.** Les matrices  $K$  et  $M$  sont *assemblées* en virgule flottante. Une vérification intégrale demanderait de l’arithmétique d’intervalles sur l’assemblage ; son effet relatif est de l’ordre de  $10^{-14}$ , contre des marges de  $10^{-1}$ . C’est le seul maillon non couvert par une démonstration.

### 3.7 Contrôles

Les deux premières lignes vérifient le sens de la borne (elle passe bien au-dessous de la valeur vraie) et sa convergence. La signature du complexe recollé se lit en outre sur les angles, indépendamment de Riemann–Hurwitz.

| contrôle                                     | valeur publiée | DDL     | obtenu                                   |
|----------------------------------------------|----------------|---------|------------------------------------------|
| orbifold (3, 3, 5)                           | 12,13623       | 12 288  | borne 11,8887 (sous la vraie)            |
| surface de Bolza                             | 3,838887       | 147 456 | borne 3,7379 (sous la vraie)             |
| spectre du (2, 6, 6) dans son revêtement     | —              | —       | inclusion à $10^{-13}$                   |
| réduction, Bolza $96 \rightarrow 12$ tuiles  | —              | 1 152   | spectre identique à $3,6 \cdot 10^{-14}$ |
| réduction, Klein $336 \rightarrow 48$ tuiles | —              | 4 608   | identique à $1,6 \cdot 10^{-14}$         |

## 4 La recherche des surfaces

On prend les surfaces où le calcul est possible : les quotients de groupes triangulaires, dont Conder [7] donne la liste complète jusqu’au genre 101 (**TriangleGroupQuotients101**, 6 543 actions pour les seuls genres 41 à 70). Chaque action est reconstruite par Todd–Coxeter à partir de ses relateurs, et vérifiée : ordre du groupe, ordres des trois générateurs, aire du complexe recollé. La liste n’est pas un oracle — elle fournit des présentations, dont on retrouve tout le reste.

Encore faut-il savoir laquelle choisir, et le nombre d’éléments nécessaires à la certification obéit à une loi simple. Avec la marge  $\mu = 1 - \frac{1/4}{\lambda_1}$  et la perte d’encadrement  $\approx 1,79 \delta$ , il faut  $\delta \leq \mu/1,79$ , d’où

$$\#\text{éléments} \approx \text{aire}(X) \cdot \frac{(2r_0)^2}{\text{aire}(T) \mu^2} \cdot 1,79^2.$$

Le critère de sélection n’est donc **ni la taille du groupe, ni  $\lambda_1$** , mais la *rondeur*  $(2r_0)^2/(\text{aire}(T) \mu^2)$ . Une action médiocre sur un triangle rond coûte moins qu’une action excellente sur un triangle allongé.

Le genre 84 le démontre. Ses plus gros groupes ont tous des triangles très allongés — (2, 4, 87) d’ordre 696, (2, 4, 170), (2, 4, 336) — de rondeur 51 à 118 ; un balayage trié par  $|G|$  n’y trouve rien. Mais en descendant dans ses 265 actions on rencontre (8, 10, 12) d’ordre 240 à rondeur **8,4** et (36, 36, 45) à 16,9, et le genre tombe au vingt-troisième essai, en 3 072 inconnues.

## 5 Résultats

**Théorème 9** (reformulation du théorème 1). *Pour chaque  $g \in \{2, \dots, 101\}$ , l’action  $T_{g,i}$  du tableau donne une surface fermée de genre  $g$  dont la première valeur propre non nulle vérifie la borne indiquée ; toutes ces bornes sont strictement supérieures à  $1/4$ .*

TABLE 1 – Les cent genres. Pour chaque  $g$ , une action de la liste de Conder, l'ordre du groupe, le type du triangle, et la borne inférieure certifiée sur  $\lambda_1$ . Toutes sont  $> 1/4$ .

| $g$ | action  | $ G $ | type         | $\lambda_1 \geq$ | $g$ | action   | $ G $ | type         | $\lambda_1 \geq$ |
|-----|---------|-------|--------------|------------------|-----|----------|-------|--------------|------------------|
| 2   | T2,7    | 24    | (3, 3, 4)    | 3,389208         | 52  | T52,1    | 2448  | (2, 3, 8)    | 0,441282         |
| 3   | T3,13   | 48    | (3, 3, 4)    | 2,214968         | 53  | T53,118  | 192   | (6, 6, 8)    | 0,295996         |
| 4   | T4,2    | 120   | (2, 4, 5)    | 1,733692         | 54  | T54,71   | 126   | (18, 18, 21) | 0,328377         |
| 5   | T5,17   | 96    | (3, 3, 4)    | 1,358756         | 55  | T55,78   | 432   | (3, 4, 6)    | 0,388444         |
| 6   | T6,14   | 75    | (3, 3, 5)    | 1,067828         | 56  | T56,31   | 660   | (3, 3, 6)    | 0,439976         |
| 7   | T7,15   | 72    | (3, 3, 6)    | 0,973235         | 57  | T57,3    | 1344  | (2, 4, 6)    | 0,484870         |
| 8   | T8,13   | 168   | (3, 3, 4)    | 1,015954         | 58  | T58,15   | 342   | (2, 9, 18)   | 0,420201         |
| 9   | T9,2    | 320   | (2, 4, 5)    | 1,033346         | 59  | T59,10   | 406   | (2, 7, 14)   | 0,481158         |
| 10  | T10,28  | 216   | (3, 3, 4)    | 1,088272         | 60  | T60,34   | 205   | (5, 5, 41)   | 0,379093         |
| 11  | T11,1   | 240   | (2, 4, 6)    | 0,793288         | 61  | T61,2    | 1440  | (2, 4, 6)    | 0,511992         |
| 12  | T12,27  | 55    | (5, 5, 5)    | 0,698426         | 62  | T62,4    | 610   | (2, 5, 10)   | 0,416144         |
| 13  | T13,25  | 96    | (3, 4, 6)    | 0,800122         | 63  | T63,8    | 504   | (2, 7, 9)    | 0,390284         |
| 14  | T14,3   | 1092  | (2, 3, 7)    | 0,844776         | 64  | T64,11   | 720   | (2, 5, 8)    | 0,412398         |
| 15  | T15,25  | 168   | (3, 3, 6)    | 0,601300         | 65  | T65,3    | 1536  | (2, 3, 12)   | 0,493928         |
| 16  | T16,2   | 600   | (2, 4, 5)    | 0,802662         | 66  | T66,28   | 228   | (3, 12, 76)  | 0,284549         |
| 17  | T17,54  | 120   | (3, 5, 5)    | 0,718496         | 67  | T67,2    | 576   | (2, 4, 48)   | 0,358114         |
| 18  | T18,5   | 136   | (2, 8, 8)    | 0,507803         | 68  | T68,20   | 336   | (3, 7, 8)    | 0,360899         |
| 19  | T19,3   | 720   | (2, 4, 5)    | 0,637957         | 69  | T69,3    | 2448  | (2, 3, 9)    | 0,496286         |
| 20  | T20,6   | 144   | (2, 8, 9)    | 0,397116         | 70  | T70,85   | 180   | (12, 12, 15) | 0,303639         |
| 21  | T21,54  | 240   | (3, 4, 4)    | 0,538305         | 71  | T71,12   | 672   | (2, 6, 8)    | 0,425361         |
| 22  | T22,25  | 504   | (3, 3, 4)    | 0,714970         | 72  | T72,4    | 710   | (2, 5, 10)   | 0,398045         |
| 23  | T23,26  | 96    | (4, 6, 8)    | 0,339395         | 73  | T73,253  | 480   | (4, 4, 5)    | 0,487477         |
| 24  | T24,20  | 168   | (3, 4, 7)    | 0,471000         | 74  | T74,6    | 584   | (2, 8, 8)    | 0,355070         |
| 25  | T25,58  | 192   | (3, 4, 6)    | 0,576297         | 75  | T75,44   | 333   | (3, 9, 9)    | 0,440189         |
| 26  | T26,18  | 600   | (3, 3, 4)    | 0,713207         | 76  | T76,72   | 500   | (4, 4, 5)    | 0,416402         |
| 27  | T27,70  | 80    | (8, 8, 10)   | 0,291550         | 77  | T77,122  | 240   | (6, 10, 10)  | 0,306086         |
| 28  | T28,54  | 324   | (3, 4, 4)    | 0,551992         | 78  | T78,10   | 440   | (2, 10, 20)  | 0,426469         |
| 29  | T29,36  | 336   | (3, 4, 4)    | 0,566455         | 79  | T79,43   | 468   | (3, 4, 12)   | 0,439163         |
| 30  | T30,49  | 72    | (12, 18, 18) | 0,307346         | 80  | T80,25   | 336   | (3, 8, 14)   | 0,286513         |
| 31  | T31,3   | 720   | (2, 4, 6)    | 0,570800         | 81  | T81,1    | 1536  | (2, 3, 16)   | 0,441587         |
| 32  | T32,4   | 310   | (2, 5, 10)   | 0,484560         | 82  | T82,18   | 972   | (2, 4, 12)   | 0,444033         |
| 33  | T33,127 | 256   | (4, 4, 4)    | 0,587153         | 83  | T83,11   | 656   | (2, 8, 8)    | 0,316527         |
| 34  | T34,2   | 1320  | (2, 4, 5)    | 0,602093         | 84  | T84,149  | 180   | (36, 36, 45) | 0,264948         |
| 35  | T35,11  | 272   | (2, 8, 8)    | 0,441926         | 85  | T85,1    | 4032  | (2, 3, 8)    | 0,421504         |
| 36  | T36,10  | 336   | (2, 6, 8)    | 0,369658         | 86  | T86,33   | 272   | (4, 16, 16)  | 0,344261         |
| 37  | T37,60  | 864   | (3, 3, 4)    | 0,617390         | 87  | T87,7    | 602   | (2, 7, 14)   | 0,415186         |
| 38  | T38,32  | 104   | (8, 8, 26)   | 0,346574         | 88  | T88,14   | 432   | (2, 18, 24)  | 0,315641         |
| 39  | T39,27  | 171   | (3, 9, 9)    | 0,407141         | 89  | T89,79   | 1320  | (3, 3, 5)    | 0,459470         |
| 40  | T40,5   | 468   | (2, 6, 6)    | 0,448507         | 90  | T90,40   | 305   | (5, 5, 61)   | 0,305879         |
| 41  | T41,102 | 480   | (3, 4, 4)    | 0,513524         | 91  | T91,39   | 1800  | (2, 5, 5)    | 0,463412         |
| 42  | T42,5   | 410   | (2, 5, 10)   | 0,451819         | 92  | T92,3    | 2184  | (2, 4, 6)    | 0,456358         |
| 43  | T43,38  | 504   | (3, 3, 6)    | 0,494802         | 93  | T93,25   | 506   | (2, 11, 22)  | 0,396975         |
| 44  | T44,36  | 120   | (8, 8, 30)   | 0,344769         | 94  | T94,39   | 465   | (3, 5, 15)   | 0,430102         |
| 45  | T45,47  | 660   | (3, 3, 5)    | 0,474397         | 95  | T95,8    | 480   | (2, 12, 40)  | 0,263201         |
| 46  | T46,46  | 1080  | (3, 3, 4)    | 0,504189         | 96  | T96,36   | 342   | (3, 18, 18)  | 0,375344         |
| 47  | T47,24  | 160   | (4, 8, 20)   | 0,329251         | 97  | T97,15   | 2304  | (2, 4, 6)    | 0,427351         |
| 48  | T48,47  | 136   | (8, 8, 17)   | 0,311694         | 98  | T98,6    | 776   | (2, 8, 8)    | 0,271098         |
| 49  | T49,174 | 320   | (4, 4, 5)    | 0,472943         | 99  | T99,52   | 1029  | (3, 3, 7)    | 0,413042         |
| 50  | T50,27  | 1176  | (3, 3, 4)    | 0,530471         | 100 | T100,66  | 660   | (3, 5, 6)    | 0,382873         |
| 51  | T51,72  | 400   | (4, 4, 4)    | 0,429523         | 101 | T101,102 | 2400  | (3, 3, 4)    | 0,342167         |

Trois observations. Les bornes décroissent globalement avec le genre, comme il se doit — l'aire croît, la place pour de petites valeurs propres aussi — mais pas de façon monotone : le genre 73 (0,487) fait mieux que le genre 44 (0,262). Les types gagnants sont majoritairement à petits ordres coniques, (2, 3, 8), (3, 3, 4), (4, 4, 5), ce qui est la traduction du critère de rondeur. Enfin les groupes gagnants ne sont pas les plus gros de leur genre : au genre 84, c'est un groupe d'ordre 180 alors que 696 était disponible.

## 6 Ce qui a été mesuré et réfuté

Une piste réfutée avec sa cause chiffrée vaut mieux qu'une piste ouverte non mesurée. Voici les trois, et une erreur de méthode.

D'abord le raffinement par le *second moment* : ajouter à la fonctionnelle un second moment de la fonction

test, en espérant resserrer la fenêtre. Il est **inerte**, et le lemme 2.4 de Magee–Naud–Puder [16] dit pourquoi — l’exposant de la fenêtre est universel (Paley–Wiener), seule la constante dépend de la fenêtre. Le gain mesuré est de +0,010 sur  $v$ .

Ensuite le *nombre de baisers*. Si l’on connaît le nombre  $\kappa$  de géodésiques minimales, les  $\kappa$  termes correspondants de la formule des traces sont explicites et négatifs. La mesure, sur la surface T23.26 de systole 6,648982 :  $v$  vaut 3,2943, et il faudrait plus de 1536 géodésiques minimales pour passer sous 2 — à 1536,  $v$  vaut encore 2,056 — quand on en trouve 96 sur la surface, et que 768 ne changeraient rien. Gain réel : extbfnul.

Puis le *spectre des longueurs complet*, généralisation de l’idée précédente : récupérer *tous* les termes géodésiques que Fortier Bourque–Petri jettent. L’outil a été construit et validé — structure de revêtement, une classe primitive  $[\eta]$  de  $\Delta^+$  d’ordre  $n = \text{ord } \varphi(\eta)$  donnant  $N/n$  géodésiques de longueur  $n\ell_0$ , racine primitive détectée par diagonalisation — et contrôlé sur Bolza, dont il rend la systole 3,0571418 de multiplicité **24** orientée, puis 4,896905, 5,828071, 6,672006, en reconnaissant 6,114284 comme le carré de la systole. Résultat : gain de 6,0 % au genre 23 et 1,1 % au genre 38, quand il fallait 39 % et 5,2 %.

**Cause.** Le spectre réel de ces surfaces est bien plus creux que la densité asymptotique  $2e^\ell/\ell$  sur laquelle reposait l’estimation : 480 géodésiques jusqu’à 8,29 au genre 23 contre 970 attendues. *Une grande systole s’achète par un spectre creux : les deux ressources s’excluent.*

Reste une erreur de méthode plutôt qu’une piste, et il faut la consigner aussi : le *criblage dans le disque de Poincaré*. Le criblage rapide maillait en polaire dans ce disque, où les côtés du maillage sont des cordes et non les géodésiques ; sur un grand triangle l’erreur de bord devient énorme. Au genre 48 il désignait l’action (50, 50, 50) avec  $\lambda_1 = 0,754506$  ; la voie exacte donne  $\lambda^{\text{CR}} = 0,1312$  puis 0,1491 : cette surface a en réalité  $\lambda_1 < 1/4$ . *Seules les valeurs certifiées sont revendiquées.*

## 7 Rétractions

**N° 1.** « La voie du second moment est close » a été écrit sans avoir mesuré l’amplification par multiplicité, qui la rouvrirait partiellement et a fourni les genres 8 à 40.

**N° 2.** « Les genres 12, 18, 20 sont réglés » a été une assertion non calculée, et fausse pour le genre 12 : il tombe par une action d’ordre 110, inférieure à l’action maximale d’ordre 120. Leçon consignée : ne jamais conclure sur la seule action maximale.

**N° 3.** La garantie de l’énumération de systole a été énoncée  $P - 2r_0$  ; et elle est fausse pour deux raisons. La complétude de la recherche en largeur coûte un  $r_0$  supplémentaire et exige les *six* générateurs  $x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}$  ; et le rayon de conjugaison est celui de l’orbite sous le sous-groupe d’indice 2 des mots pairs, non sous le groupe de réflexions. La garantie correcte est  $P - r_0 - 2\rho$ . Ré-audit des seize surfaces alors publiées : toutes tiennent, deux ayant demandé un rayon supérieur.

**N° 4.** « Le genre 84 résiste au-delà du million d’éléments » : c’était un défaut de tri, non une propriété du genre. Trié par rondeur, il tombe en 3 072 inconnues.

## 8 Conclusion

Cent genres, cent surfaces, cent bornes. La plus faible vaut 0,263201 au genre 95, la plus forte 3,389208 au genre 2, la médiane 0,4414. Chaque surface est nommée, chaque borne est vérifiée par un test d’inertie, et tout se régénère à partir des scripts. Le point de départ était huit genres.

Encore faut-il dire ce que cela vaut. La borne de Fortier Bourque–Petri lit deux nombres de la surface, le genre et la systole ; elle vaut en échange pour *toutes* les surfaces, et se démontre à la main. Le calcul certifié lit la surface entière, et ne vaut en échange que pour *une* surface, au prix de  $10^4$  à  $10^5$  inconnues. Ce sont deux outils, non deux versions du même : l’un donne un énoncé uniforme faible, l’autre un énoncé fort et ponctuel. Le présent travail est du second type, et il faut le dire sans détour : il n’énonce rien sur les surfaces sans symétrie, qui sont la totalité de l’espace des modules, rien de générique, rien d’uniforme en le genre. Cent points très particuliers, et cent démonstrations séparées.

Le plus instructif n'est d'ailleurs pas le résultat, mais un biais qui a duré longtemps et qu'aucun calcul ne signalait. Pendant tout le début, la cible optimisée a été la *systole* — parce que c'est la seule chose que le certificat lit. L'outil dictait l'objectif. Il a fallu le mesurer pour le voir : au genre 38, deux actions dont les systoles diffèrent d'un et demi, 6,364 et 4,917, ont le même trou spectral à un pour cent près. La corrélation vaut +0,74 — assez pour égarer, pas assez pour guider. Trois pistes ont été mesurées puis abandonnées, chacune avec sa cause (§6), et le prix de la plus coûteuse, le spectre des longueurs, a été un énoncé qui vaut mieux que la piste elle-même : une grande systole s'achète par un spectre creux, et les deux ressources s'excluent. Quatre rétractations ont été nécessaires (§7) ; l'une d'elles portait sur une garantie que j'avais énoncée fausse deux fois de suite.

Reste à dire ce qui arrête ce travail, et ce n'est pas la puissance de calcul. Au-delà du genre 101, la liste de Conder s'épuise ; continuer voudrait dire énumérer soi-même les actions, ce qui est de l'ingénierie et allongerait le tableau sans rien changer. Vers un énoncé uniforme, la voie de la formule des traces est fermée, et je l'ai fermée par la mesure et non par conjecture : le nombre de baisers en demanderait plus de 1536 quand la surface en montre 96, et le spectre des longueurs complet rend 6,0 % et 1,1 % quand il faudrait 39 % et 5,2 % — ces deux chiffres sont un mur, pas un retard. Sur la rigueur même, il reste le maillon de la réserve 8, l'assemblage en virgule flottante : je sais comment le fermer, par arithmétique d'intervalles, et je ne l'ai pas fait. Sur les questions ouvertes, enfin, ni la conjecture de Selberg, ni la généralité, ni l'exposant de Hide–Macera–Thomas ne cèdent à un outil dont je dispose ; j'ai désigné le troisième comme cible suivante parce que c'est le seul dont le goulot soit un problème extrémal borné, bien posé, et explicitement laissé ouvert par ses auteurs, et je ne l'ai pas commencé.

Autrement dit : cet angle d'attaque a donné ce qu'il avait à donner. Ce qui suit ne s'obtiendra pas en calculant mieux, mais en trouvant comment certifier une *famille* plutôt qu'une surface — et cet outil-là, aujourd'hui, je ne l'ai pas.

Ce qu'il faudrait tient en trois choses, dans l'ordre de difficulté croissante. Une vérification par intervalles de l'assemblage, qui est du travail et non une idée. Un moyen de transporter une borne certifiée d'une surface à ses voisines dans l'espace des modules, ce qui ferait passer de cent points à cent boules et changerait la nature de l'énoncé. Et, pour rejoindre les questions qui comptent vraiment, un pont entre les deux littératures que le §1.1 décrit comme disjointes : la probabiliste sait atteindre  $1/4 - \varepsilon$  en grand genre mais ne certifie aucune surface ; celle-ci certifie des surfaces mais ne sait rien dire du grand genre. Le trou entre les deux est exactement là où se trouve le problème.

## Reproductibilité

Chaque nombre se régénère à partir d'un script nommé du dossier 02 – Banc. Le noyau : `klein.py` (modèle de Klein, raffinement rouge géodésique), `crfem.py` (encadrement de Loewner, assemblage CR, constante  $\kappa$ ), `reduc.py` et `cert_red.py` (réduction par symétrie, inertie hermitienne réalifiée), `inertie.py` (loi de Sylvester), `ferme84.py` (criblage par rondeur et fermeture), `tableau.py` (consolidation). Pour la voie de la formule des traces : `lp_porte_b.py`, `scan_porte_b.py`, `orb_general.py`, `spectre.py`, `lp_spectre.py`. Pour la géométrie et les groupes : `grp.py`, `sysm3.py`, `polyg.py`, `conder_tri.py`, `tc2.py`.

## Références

- [1] N. Anantharaman, L. Monk, *Friedman–Ramanujan functions in random hyperbolic geometry and application to spectral gaps II*, arXiv :2502.12268 (2025).
- [2] T. Budzinski, N. Curien, B. Petri, *On Cheeger constants of hyperbolic surfaces*, Invent. Math. **242** (2025), 511–530.
- [3] A. Booker, M. Lee, A. Strömbergsson, *Twist-minimal trace formulas and the Selberg eigenvalue conjecture*, J. Lond. Math. Soc. **102** (2020), 1067–1134.
- [4] P. Buser, P. Sarnak, *On the period matrix of a Riemann surface of large genus*, Invent. Math. **117** (1994), 27–56.
- [5] C. Carstensen, J. Gedicke, *Guaranteed lower bounds for eigenvalues*, Math. Comp. **83** (2014), 2605–2629.

- [6] M. Crouzeix, P.-A. Raviart, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I*, RAIRO **7** (1973), 33–75.
- [7] M. Conder, *Quotients of triangle groups*, TriangleGroupQuotients101.
- [8] M. Fortier Bourque, B. Petri, *Linear programming bounds for hyperbolic surfaces*, arXiv :2302.02540v3 (2026).
- [9] W. Hide, M. Magee, *Near optimal spectral gaps for hyperbolic surfaces*, Ann. of Math. **198** (2023), 791–824.
- [10] W. Hide, D. Macera, J. Thomas, arXiv :2508.14874 (2025).
- [11] H. Kim, *Functoriality for the exterior square*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 139–183 ; appendice 2 avec P. Sarnak.
- [12] M. Lipnowski, A. Wright, *Towards optimal spectral gaps of random surfaces*, Ann. Probab. **52** (2024), 545–575.
- [13] M. Mirzakhani, *Growth of Weil–Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus*, J. Differential Geom. **94** (2013), 267–300.
- [14] L. Monk, F. Naud, *Spectral gaps of random hyperbolic surfaces*, ICM 2026, arXiv :2601.13988.
- [15] P. Kravchuk, D. Mazáč, S. Pal, *Automorphic spectra and the conformal bootstrap*, Comm. Amer. Math. Soc. **4** (2024), 1–63.
- [16] M. Magee, F. Naud, D. Puder, *A random cover of a compact hyperbolic surface has relative spectral gap  $\frac{3}{16} - \varepsilon$* , Geom. Funct. Anal. **32** (2022), 595–661.
- [17] M. Magee, D. Puder, R. van Handel, arXiv :2504.08988 (2025).
- [18] Y. Wu, Y. Xue, *Random hyperbolic surfaces of large genus have first eigenvalues greater than  $\frac{3}{16} - \varepsilon$* , Geom. Funct. Anal. **32** (2022), 340–410.
- [19] J.-P. Otal, E. Rosas, *Pour toute surface hyperbolique de genre  $g$ ,  $\lambda_{2g-2} > 1/4$* , Duke Math. J. **150** (2009), 101–115.
- [20] B. Petri, *Bass notes of random hyperbolic surfaces of large genus*, Séminaire Bourbaki, exposé 1255 (2026), arXiv :2607.06331.
- [21] L. E. Payne, H. F. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. **5** (1960), 286–292.
- [22] A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math. **VIII** (1965), 1–15.
- [23] A. Strohmaier, V. Uski, *An algorithm for the computation of eigenvalues, spectral zeta functions and zeta-determinants on hyperbolic surfaces*, Comm. Math. Phys. **317** (2013), 827–869.