

Deux approches de la droite critique : plafond d'une classe de certificats à bande élargie et réalisation spectrale constructive des zéros

Abdelkader BOUSABAA*

18 août 2026

Résumé

La proportion de zéros de ζ situés sur la droite critique est aujourd'hui minorée inconditionnellement par $0,6725007\dots$, valeur obtenue en substituant, dans l'argument de corrélation de paires de Montgomery, une lecture par inertie de Sylvester à la lecture par positivité qui présupposait l'hypothèse de Riemann. Deux obstacles demeurent : l'écart au plafond de la classe de certificats concernée, et le mur de bande $\lambda \leq 1$ au-delà duquel entrent des corrélations de nombres premiers de force Hardy–Littlewood. Cet article examine ces deux obstacles et rapporte les résultats obtenus le long de deux voies distinctes. La première quantifie le prix du mur de bande dans une monnaie unilatérale, met en évidence que l'hypothèse correspondante impose en réalité une bande verticale sans zéros, et établit que la chaîne de majorants de Boas–Kac modulés associée possède un plafond situé exactement à la valeur du record : elle y converge par en dessous sans jamais la franchir. La seconde voie, de nature spectrale, répare la classe de positivité pertinente : une paire de zéros hors droite n'est pas un défaut de positivité mais un état lié positif d'un spectre étendu, de sorte que l'hypothèse de Riemann s'y lit comme un énoncé de pureté spectrale. Nous établissons l'existence inconditionnelle de la corde de Kreĭn des zéros, démontrons une loi de mesure de Lebesgue pour la mesure spectrale de bord de l'opérateur prolate ainsi qu'une obstruction excluant toute réparation finie par transformations de Darboux, et décrivons la construction effective qui en résulte : à partir des seuls nombres premiers, elle reproduit trente-six zéros de ζ et restitue γ_1 à dix-neuf décimales. Aucun énoncé du présent article ne porte sur l'hypothèse de Riemann.

Mots-clés : fonction zêta de Riemann ; droite critique ; corrélation de paires ; facteur de forme ; formule explicite de Weil ; corde de Kreĭn ; équation de Gelfand–Levitan ; opérateur prolate.

Classification MSC 2020 : 11M26 (primaire) ; 11M06, 34B24, 42A82, 47B25 (secondaire).

1 Introduction

En 1859, Riemann remarque incidemment que les zéros non triviaux de sa fonction paraissent tous avoir pour partie réelle $\frac{1}{2}$, et précise n'avoir pas cherché à l'établir. Faute de preuve, la question s'est déplacée vers un substitut quantitatif : quelle *proportion* de ces zéros peut-on garantir sur la droite critique ? Trois traditions se sont succédé pour y répondre, et le présent article se situe à leur point de rencontre.

La première remonte à Hardy [26], qui montre que la droite en porte une infinité, puis à Hardy et Littlewood, qui en obtiennent une quantité $\gg T$ jusqu'à la hauteur T . Selberg [37] établit le premier une proportion positive. Levinson [29] introduit ensuite la méthode qui domine encore cette voie : un mollificateur appliqué non à ζ mais à ζ' , qui lui donne $\frac{1}{3}$; Conrey [15] porte la constante au-delà de $\frac{2}{5}$ en prolongeant la longueur du mollificateur grâce aux sommes de Kloosterman, puis Bui, Conrey et Young [7], Feng [19] et enfin Pratt, Robles, Zaharescu et Zeindler [35] atteignent $\frac{5}{12} \approx 0,4166$. Chaque pas y coûte un raffinement technique considérable pour un gain de quelques millièmes : la méthode semble buter, en pratique, au voisinage de 0,42.

*Courriel : contact@abdelkader.site.

La seconde tradition part de la corrélation de paires de Montgomery [31]. Elle ne compte pas les zéros un à un : elle évalue une forme quadratique construite sur la formule explicite, dont les deux premiers moments sont accessibles, et déduit du rapport de ces moments une minoration du nombre de zéros *simples* situés sur la droite. Sous l’hypothèse de Riemann, l’argument donne $\frac{2}{3}$, et le noyau optimal de Montgomery et Taylor [32] porte la constante à $0,6725\dots$, que Cheer et Goldston [10] améliorent marginalement. D’autres lectures conditionnelles vont plus loin : $\frac{19}{27}$ chez Conrey, Ghosh et Gonek [16] puis Bui et Heath-Brown [8], et $0,6792$ par optimisation semi-définie chez Chirre, Gonçalves et de Laat [11], dans le prolongement de la théorie des fonctions extrémales de Beurling–Selberg développée pour ce problème par Carneiro, Chandee, Littmann et Milinovich [9]. Le point commun de toutes ces constantes est leur conditionnalité : la lecture du côté zéros y exige que chaque terme d’une certaine somme soit positif, ce qui présuppose précisément ce que l’on cherche à démontrer.

Le déverrouillage récent s’est fait en deux temps. Baluyot, Goldston, Suriajaya et Turnage-Butterbaugh [1] ont d’abord rendu incondtionnel le *côté premiers* du théorème de Montgomery, isolant ainsi l’obstacle exact ; Goldston et Suriajaya [23, 24] en ont ensuite délimité le dernier refuge. Puis un travail récent [12] a remplacé la lecture par positivité par une lecture par *inertie* : dans la compression de la forme de Weil sur une famille de Gabor à densité critique, un zéro sur la droite contribue un bloc positif de rang un, tandis qu’une paire hors droite contribue un bloc hyperbolique de signature $(1, 1)$. Le rang et l’indice positif — et non la positivité — suffisent alors à conclure, par la loi d’inertie de Sylvester et une inégalité rang–trace élémentaire. La constante conditionnelle de Montgomery et Taylor devient ainsi incondtionnelle :

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0^s(T)}{N(T)} \geq 2 - \frac{1}{c_1^*} = 0,6725007\dots, \quad c_1^* = \frac{2 \tan(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2} + \tan(1/\sqrt{2})} = 0,7532960\dots \quad (1)$$

où N_0^s compte les zéros simples situés sur la droite. Le même travail délimite sa propre portée par un plafond : aucun certificat lisant les mêmes données — bande de Fourier $\lambda \leq 1$, configuration par configuration — ne peut dépasser $0,68185$.

Il reste donc deux obstacles, de natures différentes. Le premier est l’écart $0,6725 \rightarrow 0,68185$ à l’intérieur de la classe. Le second, plus profond, est le *mur de bande* : passer à $\lambda > 1$ ferait entrer dans la formule explicite des corrélations de nombres premiers de force Hardy–Littlewood, et achèterait des proportions considérables — un support $1,04$ vaudrait 70% , un support $1,70$ vaudrait 90% .

Une troisième tradition, enfin, cherche non pas à compter les zéros mais à les *réaliser* comme spectre d’un opérateur auto-adjoint, selon l’idée attribuée à Hilbert et Pólya. Elle passe par le critère de positivité de Weil [39], étudié par Bombieri [5], par la théorie des espaces de fonctions entières de de Branges [6], par le squelette semi-classique de Berry et Keating [3], et plus récemment par l’opérateur prolate de Connes et Moscovici [13, 14], dont le spectre ultraviolet reproduit celui des zéros. Le langage naturel de cette tradition est celui de la théorie spectrale inverse : cordes de Kreĭn, équation de Gelfand–Levitan [20], espaces à métrique indéfinie de Kreĭn et Langer [28].

Le présent article synthétise les résultats obtenus le long de deux voies, l’une appartenant à la seconde tradition, l’autre à la troisième. La première voie (sections 3 et 4) chiffre le prix du mur de bande, met en évidence que l’hypothèse unilatérale correspondante impose en réalité une bande verticale sans zéros, et établit qu’une chaîne naturelle de majorants possède un plafond exactement situé à la valeur (1) : elle y converge par en dessous. La seconde voie (sections 5 à 9) répare la classe de positivité pertinente, en déduit une lecture spectrale de l’hypothèse de Riemann, démontre deux théorèmes concernant l’opérateur prolate, et décrit la construction effective qui en découle. Il convient de le dire d’emblée : aucun énoncé de cet article ne porte sur l’hypothèse de Riemann, ni ne prétend améliorer (1). Les résultats sont de trois espèces, distinguées à chaque fois : des théorèmes ; des observations numériques, présentées comme telles ; et des problèmes ouverts, nommés.

2 Notations, formule explicite et certificat à deux traces

Les zéros non triviaux de ζ sont notés $\rho = \beta + i\gamma$, de multiplicité m_ρ ; le multiensemble qu’ils forment est invariant par $\rho \mapsto 1 - \bar{\rho}$ et par conjugaison. On pose $N(T)$ pour leur nombre avec $0 < \gamma \leq T$ compté avec multiplicité, $N_0(T)$ pour ceux vérifiant $\beta = \frac{1}{2}$, $N_0^s(T)$ pour ceux qui sont de plus simples, et $N_d(T)$ pour le nombre de points distincts. On écrit $l = \log(T/2\pi)$, et l’on introduit l’ordonnée tournée $\gamma_\rho := (\rho - \frac{1}{2})/i$, qui est réelle si et seulement si ρ est sur la droite. Aucune hypothèse n’est faite sur β .

La formule explicite de Riemann–Weil, écrite sous forme quadratique, évaluée pour f paire assez régulière la somme spectrale $\sum_{\rho} h(\gamma_{\rho})$, avec $h = \hat{f}\bar{\hat{f}}$, en trois strates : la contribution des pôles, un terme archimédien de densité $W_{\infty}(r) = \operatorname{Re} \psi(\frac{1}{4} + \frac{ir}{2}) - \log \pi$, et une somme sur les puissances de nombres premiers de poids $\Lambda(n)/\sqrt{n}$. C’est le seul intrant arithmétique de tout ce qui suit.

Le certificat de [12] restreint la forme hermitienne de Weil à une famille de Gabor à densité critique : une fenêtre lissée ϕ de support $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, $L = \lambda l$, modulée aux fréquences τ_k pavant $[T, 2T]$ au pas $2\pi/L$. Seuls les premiers $n \leq X = (T/2\pi)^{\lambda}$ entrent alors dans la formule explicite : le paramètre λ est une largeur de bande. La matrice réelle symétrique $\hat{G}$ ainsi obtenue se décompose, à une queue contrôlée près, en $\hat{G} = P + Q$ où $P \succeq 0$ est de rang au plus le nombre de points distincts de la droite, et où chaque paire hors droite $\{\rho, 1 - \bar{\rho}\}$ contribue à Q un bloc de signature $(1, 1)$; la loi d’inertie de Sylvester majore donc $n_+(Q)$ par le nombre de telles paires. Les deux traces $\operatorname{tr} \hat{G}$ et $\operatorname{tr} \hat{G}^2$ sont les deux moments de Montgomery, évalués inconditionnellement pour $\lambda \leq 1$ [1], et l’on a, en normalisant par $(\int v)^2$ pour un profil de fenêtre v ,

$$\frac{(\operatorname{tr} \hat{G})^2}{\operatorname{tr} \hat{G}^2} \longrightarrow c_{\lambda}(v) = \frac{\lambda(\int v)^2}{\int v^2 + \lambda^2 \iint |s - s'| v(s)v(s') ds ds'}, \quad (2)$$

dont l’inégalité rang–trace tire $\liminf N_0^s/N \geq 2 - 1/c_{\lambda}(v)$. La fenêtre plate à $\lambda = 1$ donne $c = \frac{3}{4}$ et la proportion $\frac{2}{3}$; le maximiseur de (2) résout $v'' + 2\lambda^2 v = 0$, c’est-à-dire $v^*(s) = \cos(\sqrt{2}\lambda s)$ — le noyau de Montgomery et Taylor — et fournit (1).

Le second moment se lit sur le facteur de forme de Montgomery,

$$F(\alpha, T) := \left(\frac{T}{2\pi} \log T\right)^{-1} \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} T^{i\alpha(\gamma - \gamma')} w(\gamma - \gamma'), \quad w(u) = \frac{4}{4 + u^2},$$

réel et pair, par la formule $\|\hat{G}\|_F^2/N = \lambda^{-1} \int_{-\lambda}^{\lambda} A_v(\alpha/\lambda) F(\alpha, T) d\alpha + o(1)$, où A_v désigne l’autocorrélation de v . Sur $|\alpha| \leq 1$, on sait inconditionnellement $F = \delta_0 + |\alpha| + o(1)$ au sens moyenné de [1]. Il faut souligner un point qui sera décisif à la section 4 : la fermeture de la somme par l’équation fonctionnelle exhibe F comme un module au carré, de sorte que $F(\alpha, T) \geq 0$ pour *tout* α , inconditionnellement [1, théorème 1]. Ce qui échoue sans l’hypothèse de Riemann n’est donc pas la positivité de F , mais la positivité *terme à terme* de la somme qui la définit.

3 Le mur de bande et son prix

À $X = T^{1+\delta}$ avec $0 < \delta < 1$, l’examen terme à terme de la machine montre que l’essentiel survit : la trace conserve son terme principal, la queue spectrale reste $o(1)$, et les blocs croisés demeurent négligeables devant TL^3 . Le terme qui déborde est la forme bilinéaire hors diagonale portant sur les couples de puissances de premiers $n \neq m$: l’inégalité de Montgomery–Vaughan y donne $O(L^2 X)$ contre un terme principal d’ordre TL^3 , de sorte que la rupture se produit dès $X \gg TL^{3-c}$. Les couples *résonants* $|n - m| \leq nL^{O(1)}/T$, vides pour $X \leq T$, portent une masse brute $\asymp T^{1+\delta}$, supérieure au terme principal : les évaluer, plutôt que les majorer, exigerait une compensation d’ordre relatif $T^{-\delta} L^3$, c’est-à-dire une information authentique sur les corrélations de nombres premiers. C’est le mur de bande sous forme quantitative.

Deux observations élémentaires en modifient toutefois la nature. D’une part, le certificat s’assemble avec le second moment affecté du signe négatif : un *majorant* de $\|\hat{G}\|_F^2$ suffit, et aucune évaluation asymptotique n’est requise. D’autre part, la masse nouvellement apportée par l’élargissement n’entre qu’au second ordre en δ . Précisément, si l’on suppose

$$(F_{C,\delta}) \quad F(\alpha, T) \leq C\alpha + o(1) \quad \text{uniformément pour } 1 < \alpha \leq 1 + \delta, \quad (3)$$

alors, pour la fenêtre plate à $\lambda = 1 + \delta$, un calcul direct donne $\|\hat{G}\|_F^2/N \leq \lambda^{-1} + \lambda/3 + (C - 1)M(\lambda) + o(1)$ avec $M(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)/(3\lambda^2) = \delta^2 + O(\delta^3)$, d’où un certificat $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\delta - O((C - 1)\delta^2)$: le gain de bande est linéaire en δ , la pénalité quadratique. Il en résulte que *toute* constante C , si grande soit-elle, bat (1) pourvu que δ soit assez petit. La table 1 donne la carte des taux de change après optimisation de la fenêtre.

Cette carte invite à chercher $(F_{C,\delta})$ dans une monnaie faible. Le dictionnaire de Goldston et Montgomery [22] la traduit en une majoration unilatérale de la variance des nombres premiers dans les intervalles

C	$\delta_{\min}$	cert. à $\delta = 0,05$	cert. à $\delta = 0,15$	cert. maximal	δ^*
1	0^+	0,7044	0,7561	0,8801	0,75
2	0^+	0,7028	0,7450	0,7915	0,65
10	0^+	0,6931	0,6998	0,7013	0,65
100	0^+	0,6748	0,6751	0,6772	0,70

TABLE 1 – Proportion certifiée sous l’hypothèse (3), fenêtre optimisée sous la contrainte $v \geq 0$ (quadrature $n = 340$; l’étalonnage à $(\lambda, C) = (1, 1)$ redonne 0,6725033 contre la valeur exacte 0,6725007). La conjecture de corrélation de paires correspond à la ligne $C = 1$.

longs, $\int_0^X (\psi(x+y) - \psi(x) - y)^2 dx \leq CyX \log(X/y)(1 + o(1))$ pour $y \in [X^{1/(1+\delta)}, X^{1-\varepsilon}]$ — un régime que la littérature n’a jamais eu à traiter comme front principal. Les corrélations moyennées de Matomäki, Radziwiłł et Tao [30] n’y suffisent pas telles quelles, l’appariement résonant exigeant une petitesse *après* oscillation et non en valeur absolue; la voie par densité de zéros, même munie du meilleur exposant connu [25], laisse subsister des puissances de logarithme.

La difficulté est cependant plus profonde qu’un simple déficit technique, et c’est le point que nous souhaitons souligner ici. L’hypothèse (3) n’est pas une hypothèse douce.

Proposition 3.1. *Supposons (3) pour un couple (C, δ) . Alors, à l’exception de $o(N)$ d’entre eux, tous les zéros de hauteur $\leq T$ vérifient $\beta < \frac{1}{2} + \frac{\log C}{2\delta \log T} + o(1)$.*

En effet, les couples formés d’un zéro et de son partenaire d’équation fonctionnelle contribuent à $F(\alpha, T)$ des termes positifs de taille $T^{\alpha|2\beta-1|}$; majorer F par $C\alpha$ sur $1 < \alpha \leq 1 + \delta$ borne donc la profondeur des zéros. Au point doux de la table 1, la contrainte s’écrit $\sigma > 0,82$: l’hypothèse dissimule une quasi-hypothèse de Riemann par bandes. Cette observation ne réfute pas la réduction — la carte des taux de change reste un calcul formel exact, et son contenu est instructif — mais elle en corrige l’interprétation : la « monnaie » n’est pas faible, et le mur de bande ne s’achète pas à bon compte. Ajoutons, pour être complet, qu’une rédaction intégrale à $\lambda > 1$ demanderait par ailleurs de re-démontrer trois majorations d’erreur supplémentaires que la preuve originale n’établit que sous $\lambda \leq 1$.

4 Une chaîne de majorants et son plafond

Si le prix du mur ne peut être payé par une hypothèse arithmétique douce, on peut tenter de le payer avec des lectures de bande ≤ 1 seulement. C’est l’objet de la chaîne suivante, qu’il est naturel de considérer et dont nous établissons ici les limites. On choisit une fenêtre rendant petit le poids hors bande; on utilise le fait que les lectures de tout noyau de bande $[-1, 1]$ sont inconditionnelles; et l’on domine le noyau oscillant dual du besoin hors bande par un majorant K de bande 1, positif ponctuellement sur $\mathbb{R}$. Majorer une oscillation modulée à une fréquence située juste au-dessus de la bande par une fonction de bande 1 est un problème extrémal classique, celui de Boas et Kac [4] et de Vaaler [38], et c’est là que se joue la viabilité de la chaîne.

Un calcul de premier ordre en fixe le critère. Le gain de bande vaut $0,686\delta$ au plus, tandis que le coût du majorant vaut $c_{\text{opt}} v(\frac{1}{2})^2 \delta$; avec la valeur de bord $v(\frac{1}{2})^2 = 0,578$ du noyau de Montgomery–Taylor, la chaîne ne survit que si $c_{\text{opt}} < 1,19$. Or, à fenêtre fixée, la résolution exacte du problème extrémal donne $c_{\text{opt}}(\delta) = 1,70, 1,58, 1,46$ et $1,36$ pour $\delta = 0,05$ à $0,20$: la chaîne échoue. Il reste alors à optimiser conjointement la fenêtre et le majorant, ce qui change la donne au premier ordre : raser le bord de la fenêtre ne coûte au certificat de bande 1 qu’un terme du second ordre, par le théorème de l’enveloppe, alors que le coût de la chaîne décroît linéairement.

Le problème extrémal joint se résout exactement par programmation semi-définie, en paramétrant l’écart majorant-cible sous forme de Fejér–Riesz, $D(\Delta) = \text{tr}(ZE(\Delta))$ avec $Z \succeq 0$: la positivité sur $\mathbb{R}$ devient structurelle, et il n’existe aucune grille sur laquelle le programme pourrait tricher — précaution nécessaire, une formulation par programmation linéaire discrétisée produisant des solutions violant la contrainte entre les points d’échantillonnage. Le programme discrétisé introduit en revanche un biais de bord de bande dont l’analyse est le cœur de la question. Le résidu de quadrature spectrale se décompose exactement en un noyau de liséré, porté par l’intervalle non pavé $(1, 1 + \frac{1}{2k}]$ et de taille $w(1)/k$ où k désigne l’échelle de

discrétisation, plus un reste de point milieu en $O(1/k^2)$. Autrement dit, la loi de convergence en échelle comporte un terme en $1/k$, et non seulement en $1/k^2$ comme le suggérerait une heuristique de quadrature naïve.

Cette distinction est décisive, car elle gouverne la valeur extrapolée. L’ajustement de l’exposant sur les données, plutôt que sa supposition, donne 0,93 à 0,98 sur l’ensemble des échelles calculées, valeurs groupées autour de 1 ; de façon équivalente, le coefficient dominant dérive de 30 à 47 % entre deux paires de Richardson successives, ce qui est la signature arithmétique d’un terme en $1/k$ lu à travers un modèle en $1/k^2$. Une prédiction verrouillée avant calcul, à une échelle plus fine que toutes les échelles mesurées, est reproduite à $7,7 \cdot 10^{-8}$ par le modèle $1/k + 1/k^2$. Sous tout modèle compatible avec les données, la valeur continue de la chaîne se situe alors entre 0,6717 et 0,6725, le meilleur couple $(\delta, \text{fenêtre})$ conduisant à 0,67241.

Remarque 4.1. La conclusion, de nature numérique mais robuste, est que la chaîne de majorants de Boas–Kac modulés *converge vers la valeur (1) par en dessous et ne la franchit pas*. Deux éléments en renforcent la lecture. D’une part, la valeur extrapolée est remarquablement uniforme en δ sur tout l’intervalle $[0,3; 0,7]$ et insensible à la structure fine de la fenêtre, ce qui est le comportement attendu d’un plafond de classe et non d’un optimum accidentel. D’autre part, la campagne de ré-optimisation des fenêtres aux échelles fines ne déplace les limites que d’un ordre de grandeur inférieur à l’incertitude d’extrapolation : la marge d’optimisation de la classe est épuisée, et ce n’est donc pas une fenêtre manquante qui fait défaut.

Il vaut la peine de nommer précisément ce qui bloque, car ce n’est pas ce que l’on attend. Comme rappelé à la section 2, le facteur de forme est inconditionnellement positif : une minoration de F au-delà de la bande n’est donc pas le maillon manquant. L’obstruction véritable est ailleurs. La lecture du majorant passe par une intégrale $\int \widehat{K} d\nu$ contre une mesure spectrale *positive* ; sans l’hypothèse de Riemann, la mesure des paires n’est pas positive terme à terme, et une domination ponctuelle $K \geq \check{k}$ sur $\mathbb{R}$ n’achète rien pour une paire hors droite isolée, les supports de $\widehat{K}$ et de $\widehat{\check{k}}$ étant disjoints. L’objet à contrôler est le *défaut terme à terme* de la domination, affecté du poids $X^{2\lambda y}$ par paire de profondeur $y = \beta - \frac{1}{2}$ — exponentiellement bruyant là précisément où la positivité est perdue. Le seul régime où une lecture terme à terme est aujourd’hui connue pour survivre est la boîte fine de Goldston et Suriajaya [24], où tous les zéros sont supposés à distance $o(1/\log T)$ de la droite.

Signalons enfin, sur le même thème des plafonds, un résultat de la même veine méthodologique concernant les zéros de ξ' . Le certificat à deux traces y donne inconditionnellement 0,85838 pour la fenêtre plate et 0,86864 pour une fenêtre quartique, valeurs voisines du record de 0,86957 obtenu par la méthode de Levinson [40]. Le noyau pertinent étant celui de Farmer et Gonek [18], le fonctionnel de certificat associé est strictement convexe et son unique point stationnaire, solution de l’équation d’Euler–Lagrange $v + F_0 * v = \text{cste}$, est admissible ; il donne le plafond exact

$$\sup_v [2 - C(v)] = 0,8686415 \dots$$

Le record de [40] est donc *structurellement* hors d’atteinte de cette classe de certificats, le déficit $9,3 \cdot 10^{-4}$ dépassant de trois ordres de grandeur l’incertitude numérique : le franchir exigerait un intrant arithmétique nouveau, non une meilleure fenêtre.

5 La classe Toeplitz–Hankel : les paires hors droite comme états liés

Nous changeons maintenant de voie. Le point de départ est une correction de la classe de positivité dans laquelle on lit les configurations de zéros, correction dont les conséquences se révèlent considérables.

Considérons une paire cohérente hors droite, $\{\frac{1}{2} \pm \eta + i\gamma\}$, et échantillonnons-la à deux paramètres (s, t) — un temps elliptique et un centre hyperbolique. Sa donnée est le vecteur $w(s, t) = 2e^{i\gamma s} \cosh(\eta t)$ et son noyau, de rang un, est évidemment positif : la réalité arithmétique est positive, comme le critère de Weil l’exige. Mais sa structure hyperbolique se scinde exactement :

$$4 \cosh(\eta t) \cosh(\eta t') = \underbrace{2 \cosh(\eta(t + t'))}_{\text{partie de Hankel}} + \underbrace{2 \cosh(\eta(t - t'))}_{\text{partie de Toeplitz}}, \quad (4)$$

et le second terme n’est la transformée d’aucune mesure positive du plan des fréquences mixtes. Une classe de noyaux qui n’admettrait que la première partie ne contiendrait donc pas la donnée d’une véritable

paire de zéros. La classe correcte est celle des noyaux *Toeplitz + Hankel*, de la forme $K((s, t), (s', t')) = G_H(s - s', t + t') + G_T(s - s', t - t')$.

Théorème 5.1 (représentation dans la classe Toeplitz–Hankel). *Soit K un noyau continu, hermitien, elliptiquement stationnaire, de classe $T + H$ et de croissance $|G_H(0, \tau)| + |G_T(0, \tau)| \leq Ce^{Y|\tau|}$. Alors K est un noyau positif si et seulement s’il existe deux mesures positives finies ρ_+ et ρ_- sur $\mathbb{R} \times \Sigma_Y$, où $\Sigma_Y := \mathbb{R}_+ \cup i(0, Y]$ désigne le spectre étendu, telles que*

$$K((s, t), (s', t')) = \int e^{i\xi(s-s')} c_\omega(t) c_\omega(t') d\rho_+ + \int e^{i\xi(s-s')} s_\omega(t) s_\omega(t') d\rho_-,$$

avec $c_\omega = \cos$ ou $\cosh$ et $s_\omega = \sin$ ou $\sinh$ selon que $\omega \in \mathbb{R}_+$ ou $\omega \in i(0, Y]$. La paire (ρ_+, ρ_-) est unique.

La démonstration double les échantillons en $t \in \mathbb{R}$, scinde la symétrie de réflexion en secteurs pair et impair par $\Pi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm R)$, et applique à chaque secteur un théorème de représentation de type Bochner pour le demi-groupe à involution sous-jacent — construction de Gelfand–Naïmark–Segal, théorème de Stone pour la partie elliptique, théorie des demi-groupes symétriques locaux de Klein et Landau [27] pour la partie hyperbolique, dans le cadre général de Berg, Christensen et Ressel [2]. La positivité du noyau doublé s’obtient, pour les noyaux exactement de classe $T + H$, par une identité de polarisation ; le cas général, obtenu par passage à la limite faible-*, n’est pas rédigé ici et constitue un point de vérification.

La conséquence structurelle est un renversement de perspective. Par (4) appliqué paire par paire, la donnée cohérente de tout multienemble de zéros symétrique appartient à la classe, avec $\rho_- = 0$ et ρ_+ portant des atomes réels — les zéros alignés, de poids leur multiplicité — et des atomes *imaginaires in* — les paires hors droite, de poids positif. Une paire hors droite n’est donc pas un défaut de positivité : c’est un *état lié* positif du spectre étendu, au sens exact où ce terme s’entend dans la théorie de Gelfand–Levitan, et Σ_Y est le spectre d’une corde de Kreĭn dont les valeurs propres négatives $-\eta^2$ sont les profondeurs au carré. L’hypothèse de Riemann s’énonce alors comme un énoncé de *pureté spectrale* : la mesure ρ_+ ne charge pas $i(0, \frac{1}{2}]$, autrement dit la corde n’a pas d’état lié. Le paramètre κ de carrés négatifs de Kreĭn et Langer [28], que l’on pourrait croire destiné à compter les zéros hors droite, compte en réalité tout autre chose : les violations de la symétrie fonctionnelle elle-même, de sorte que $\kappa = 0$ pour toute configuration de zéros authentique. Il fournit ainsi un détecteur d’incohérence des modèles d’adversaires que l’on pourrait être tenté d’utiliser à sa place. Notons enfin que cette lecture est quantitative et non seulement qualitative : sur des configurations synthétiques, la profondeur injectée se retrouve exactement par inversion du profil pair.

6 La corde de Kreĭn des zéros et le diagramme à deux faces

Le langage précédent désigne un objet, et la théorie inverse de Kreĭn permet d’établir son existence sans aucune hypothèse. Rappelons qu’une corde de Kreĭn est une fonction de masse croissante M sur un intervalle, dont l’opérateur $-df'/dM$ possède une mesure spectrale principale ρ , la correspondance étant bijective sur la classe $\int d\rho(\lambda)/(1 + \lambda) < \infty$ [17].

Théorème 6.1. *La mesure de comptage $\rho_\zeta := \sum_{n \geq 1} \delta_{\gamma_n^2}$ des ordonnées des zéros non triviaux vérifie $\int d\rho_\zeta(\lambda)/(1 + \lambda) < \infty$. Il existe donc une unique corde de Kreĭn dont ρ_ζ est la mesure spectrale principale.*

La vérification tient en trois lignes : la formule de Riemann–von Mangoldt donne $N(T) \asymp T \log T$, d’où $\sum_n \gamma_n^{-2} = \int_0^\infty 2N(T)T^{-3}dT < \infty$ par sommation d’Abel. La corde des zéros est ainsi un objet mathématique aussi déterminé que ζ elle-même, et son *identification* — écrire sa fonction de masse — est un problème bien posé : c’est la question de Hilbert et Pólya en coordonnées de corde.

Ce théorème a une conséquence d’hygiène qu’il importe d’énoncer, car elle détermine où se situe réellement le contenu arithmétique. Construite à partir des zéros, la corde a automatiquement une masse positive et un spectre réel : l’hypothèse de Riemann n’y dit rien. Son contenu apparaît sur l’autre face d’un diagramme à deux faces. D’un côté, les ordonnées (γ_n) déterminent la corde par la théorie inverse de Kreĭn. De l’autre, les puissances de premiers (p^k) déterminent, via la formule explicite et la reconstruction de Gelfand–Levitan, une *corde arithmétique* dont la masse est a priori signée. L’hypothèse de Riemann équivaut alors à l’énoncé que cette seconde construction produit une véritable corde de Kreĭn, c’est-à-dire une masse positive, ou de façon équivalente que sa donnée spectrale ne charge pas $i(0, \frac{1}{2}]$. La construction précise de la corde arithmétique, avec le degré de finesse nécessaire pour *tester* cette équivalence et non seulement l’énoncer, constitue le problème ouvert central de cette voie.

En attendant cette construction, on peut regarder la corde. Les coordonnées quotient-différence de la mesure de comptage tronquée aux cent vingt premiers zéros [33], comparées à celles d'un gaz de Poisson et d'un peigne rigide de même comptage lissé, présentent des écarts médians relatifs de 3,8 % pour le peigne contre 11,6 % pour le gaz : *la corde des zéros est trois fois plus proche du cristal que du gaz*. C'est la rigidité spectrale, que la corrélation de paires a rendue quantitative, exprimée dans les coordonnées natives de l'objet de Hilbert et Pólya lui-même.

7 Le noyau de Gelfand–Levitan arithmétique

L'objet d'entrée de la face arithmétique se lit directement dans la formule explicite. En dépliant sur $[0, X]^2$ la contribution des pôles et celle des premiers, on obtient le noyau

$$F_{\text{arith}}(x, y) = \underbrace{2 \cosh \frac{x}{2} \cosh \frac{y}{2}}_{\text{pôle}} + \underbrace{\Phi_{\infty}(x, y)}_{\text{archimédien}} - \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} [\delta_{x+y=\log n} + \delta_{|x-y|=\log n}]}_{\text{crêtes des premiers}}, \quad (5)$$

où Φ_{∞} est le noyau de densité W_{∞} . Trois lectures s'imposent. Le pôle de ζ en $s = 1$ — le terme principal du comptage des premiers — entre dans la théorie spectrale comme un état lié situé *exactement* à la profondeur $\eta = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire au bord de la bande critique : le premier objet que l'arithmétique livre à cette théorie est déjà critique par construction, ce qui fait écho à la non-négativité de la constante de de Bruijn–Newman [36]. Les nombres premiers, ensuite, n'entrent que par des masses de Dirac portées par les droites $x \pm y = \log n$, de sorte que la géométrie du noyau est la table des $\log p^k$. Enfin, la section tronquée à $[0, X]^2$ ne rencontre que les premiers $p^k \leq e^{2X}$: on dispose ainsi d'une filtration par des énoncés finis, chacun testable.

La positivité de la forme quadratique associée à (5) sur les fonctions paires à support dans $[-X, X]$, pour tout $X > 0$, équivaut à l'hypothèse de Riemann : c'est le critère de Weil [39], dont l'énoncé n'est pas modifié ici. Ce que le langage spectral inverse ajoute est un dictionnaire. Le critère de Weil répond « positif ou non » ; l'inertie du noyau répond *combien* de directions négatives et à *quelle profondeur*, chaque paire hors droite créant une valeur propre négative localisée dont l'amplitude croît avec la profondeur. La vérification numérique confirme ce tableau à tous les niveaux : la formule explicite est reproduite à $5,3 \cdot 10^{-10}$ en relatif par comparaison de ses deux membres sur 10^5 zéros tabulés ; les valeurs propres minimales des matrices arithmétique et spectrale coïncident à 10^{-6} près et se tiennent, aux trois échelles testées, au bord exact de la positivité, sans marge — comportement que la criticité impose ; et l'injection d'une paire hors droite synthétique de profondeur η_0 produit une valeur propre négative croissant régulièrement, de $-0,03$ à $\eta_0 = 0,10$ jusqu'à $-0,90$ à $\eta_0 = 0,50$.

Les deux faces du diagramme se rencontrent enfin numériquement. Le profil construit sur 10^5 zéros, une fois le fond archimédien soustrait, fait apparaître les crêtes des premiers une à une — onze puissances détectées, positions égales à $\log n$ à 10^{-4} près et hauteurs à $\Lambda(n)/\sqrt{n}$ à 10^{-3} près. L'équation de Gelfand–Levitan, résolue indépendamment sur chaque face, produit deux potentiels qui coïncident à $2,7 \cdot 10^{-3}$ en relatif sur la fenêtre de validité : cent mille zéros d'un côté, douze puissances de premiers, un cosinus hyperbolique et une fonction digamma de l'autre, une seule courbe. La reconstruction cesse d'être régulière à une abscisse finie mesurable, $x^* \approx 1,03$, repoussée à 1,21 lorsque l'on réintègre le pôle — dont la contribution positive de rang un prolonge donc la fenêtre. Ce seuil sature lorsque le filtre s'affine, ce qui indique une constante arithmétique plutôt qu'un artefact : le mécanisme heuristique, chaque crête agissant comme un miroir lissé de valeur propre $-\frac{1}{2}\Lambda(n)/\sqrt{n}$, prédit la traversée lorsque l'accumulation atteint l'unité, ce qui donne le bon ordre de grandeur.

8 L'opérateur prolate : réalisation, loi de Lebesgue, obstruction

La face spectrale dispose d'un candidat sérieux. L'opérateur prolate de Connes et Moscovici [13, 14],

$$W_{\lambda} \xi = -\partial((\lambda^2 - x^2)\partial\xi) + (2\pi\lambda)^2 x^2 \xi \quad \text{sur } L^2(\mathbb{R})^{\text{pair}},$$

admet une unique extension auto-adjointe W_{sa} depuis l'espace de Schwartz, et ses valeurs propres négatives reproduisent le comportement ultraviolet de celles des zéros. La réalisation correcte est déterminée par les

conditions de domaine : en $\pm\lambda$, l'annulation de $(\lambda^2 - x^2)\xi'$, c'est-à-dire l'absence de terme logarithmique ; à l'infini, pour le secteur pair, une queue $\sin(2\pi\lambda x)/x$ pure. Implémentée directement, par tir depuis la solution régulière de Frobenius et quantification par annulation de la composante en cosinus de la phase resommée, et lue au moyen du dictionnaire de Dirac $\gamma_n \leftrightarrow 2\sqrt{\mu_n}$, cette réalisation apparie les cinquante-cinq premiers états aux cinquante-cinq premiers zéros un à un, avec $2\sqrt{\mu_n}/\gamma_n$ compris entre 1,004 et 1,019 dès $n = 5$. L'appariement n'a lieu qu'à $\lambda^2 = 2$: à $\lambda^2 = 1$, un excès de densité $\log 4$ l'interdit. Il s'agit là d'une confirmation numérique indépendante, au niveau des valeurs propres individuelles, du théorème ultraviolet de [13].

Le second ingrédient d'une corde n'est pas le spectre mais les constantes de normalisation. Nous les déterminons.

Théorème 8.1 (loi de Lebesgue au bord de Sonine). *Sur la branche négative paire de W_{sa} , posons $T(\mu) = \int_{\lambda}^{\infty} (QP)^{-1/2} dx$ avec $P = x^2 - \lambda^2$ et $Q = (2\pi\lambda x)^2 + \mu$, et notons $w_n = f_n(\lambda)^2 / \|f_n\|^2$ les poids spectraux de l'évaluation au bord. Alors, quand $n \rightarrow \infty$,*

$$\Delta\mu_n = \frac{2\pi}{T(\mu_n)}(1 + o(1)), \quad w_n = \frac{\pi}{\lambda T(\mu_n)}(1 + o(1)), \quad \text{d'où} \quad \frac{w_n}{\Delta\mu_n} \longrightarrow \frac{1}{2\lambda} :$$

la mesure spectrale du couple $(W_{\text{sa}}|_{\text{pair}}, \text{ev}_{\lambda})$ converge, après moyennisation locale, vers la mesure de Lebesgue $d\mu/(2\lambda)$.

La démonstration repose sur trois lemmes. Au bout singulier, la condition sans logarithme sélectionne la solution de Bessel $J_0(2\sqrt{\kappa t})$, et la normalisation $f(\lambda) = 1$ fixe l'amplitude WKB à $C^2 = 2\lambda/\pi$ — le π provenant de l'asymptotique de Bessel, le 2λ de la quasi-dérivée. Ensuite, la norme moyenne le $\cos^2$ de la région oscillatoire contre une enveloppe à variation lente, le terme oscillant étant négligeable par le lemme de Riemann–Lebesgue. Enfin la phase resommée quantifie le spectre, d'où l'espacement. Le niveau de rigueur est celui des asymptotiques uniformes de type Langer [34] ; les taux $o(1)$ ne sont pas chiffrés, et la vérification numérique mesure un résidu plat de $4 \cdot 10^{-3}$ sur les poids, l'espacement étant lui prédit à 10^{-4} .

Ce théorème a un corollaire inattendu, qui éclaire la sélection de λ . La forme close de T donne l'asymptotique $\sqrt{\mu} T(\mu) - \log(\sqrt{\mu}/\pi\lambda^2) \rightarrow \log 2$, mesurée à $3 \cdot 10^{-6}$, d'où la densité d'états $dN/d\gamma = \frac{1}{2\pi} \log(\gamma/\pi\lambda^2) + o(1)$ dans la variable de Dirac $\gamma = 2\sqrt{\mu}$. Cette densité coïncide avec celle de von Mangoldt, $\frac{1}{2\pi} \log(\gamma/2\pi)$, si et seulement si $\pi\lambda^2 = 2\pi$, c'est-à-dire $\lambda^2 = 2$: la valeur distinguée de [13] se déduit de la constante $\log 2$ de l'intégrale de phase.

La mesure ainsi obtenue est uniforme, mais absolument continue, alors que la corde des zéros exige une mesure de comptage. La question naturelle est donc de savoir si l'on peut redresser les poids sans toucher au spectre, c'est-à-dire déplacer la normalisation à l'intérieur de la famille isospectrale. La réponse est négative.

Théorème 8.2 (obstruction de Darboux). *Aucune chaîne finie de transformations de Darboux, simples ou doubles, ne transforme le couple $(W_{\text{sa}}|_{\text{pair}}, \text{ev}_{\lambda})$ en un couple dont les poids de bord sont asymptotiquement constants. En particulier, la corde des zéros n'appartient pas à l'orbite de Darboux finie de l'opérateur prolate.*

Le mécanisme est élémentaire une fois isolé. Une factorisation $H = A^*A + E_0$ multiplie les poids de bord par un facteur $c(\mu - E_0)^{\pm 1}$, la partie dérivée de A s'éteignant sur la solution régulière au bout considéré ; une double commutation, au sens de Gesztesy et Teschl [21], ne modifie qu'un seul poids. Toute chaîne finie agit donc, à un nombre fini d'exceptions près, par $w_n \mapsto c R(\mu_n) w_n$ avec R rationnelle, donc $R(\mu) \sim \mu^k$ pour un entier k . Or le théorème 8.1 donne $w_n \sim \mu_n^{1/2} / \log \mu_n$ à constantes près, de sorte que le poids transformé se comporte comme $\mu_n^{k+1/2} / \log \mu_n$: l'exposant $k + \frac{1}{2}$ n'étant jamais nul, la limite ne peut être une constante non nulle. Un fait complémentaire éclaire la raison profonde de cette impossibilité : la mesure de comptage des zéros satisfait la condition de masse finie de Kreĭn, alors que la mesure du bord de Sonine ne la satisfait pas, sa masse divergeant logarithmiquement. Les deux objets n'habitent pas la même classe de cordes, et tout chemin de l'un à l'autre doit traverser les classes plutôt que conjuguer à l'intérieur de l'une d'elles. L'habillage nécessaire est donc infini — et, comme la section précédente le suggère, arithmétique.

n	$\hat{\gamma}_n$ reconstruit	erreur relative
1	14,13472514173469379198	$1,07 \cdot 10^{-19}$
2	21,02203963877155508	$4,2 \cdot 10^{-18}$
3	25,01085758014568969	$3,7 \cdot 10^{-17}$
4	30,42487612585955288	$1,3 \cdot 10^{-15}$

TABLE 2 – Ordonnées reconstruites à partir du noyau arithmétique seul, par rediagonalisation du faisceau à quarante-huit décimales de précision de calcul.

9 La construction effective

Il reste à exécuter cet habillage. Par complétude des fonctions propres d'évaluation au bord, la donnée de Gelfand–Levitan requise pour déformer la mesure de Lebesgue du théorème 8.1 vers la mesure de comptage des zéros s'écrit $F = \sum_n \tilde{w}_n \varphi_n \otimes \varphi_n - I$: la renormalisation est portée par le terme $-I$. La solvabilité de l'équation correspondante n'est pas une question numérique.

Théorème 9.1. *Pour toute troncature finie du problème, la forme associée se décompose en $\langle \psi, (I+F)\psi \rangle = \sum_n a_n |\langle \psi, \varphi_n \rangle|^2 + \langle \psi, g(H)\psi \rangle$ avec $g(\mu) = 1 - e^{-2\mu/\sigma^2} > 0$. L'équation d'habillage est donc solvable, inconditionnellement, à toute fenêtre et tout paramètre de troncature σ .*

L'habillage étant solvable, on peut le résoudre puis relire le spectre de l'objet obtenu. L'outil est un faisceau matriciel : en adjoignant au noyau habillé S le noyau de premier moment S_1 , obtenu en pondérant la fonction test par $\gamma^2/4$, les valeurs propres généralisées du couple (S_1, S) sont *exactement* les atomes de la mesure sous-jacente, indépendamment de la quadrature employée — celle-ci n'entrant que par le conditionnement. C'est ce fait, et non une astuce numérique, qui explique la précision de la chaîne.

Le résultat de cette relecture est le suivant : à partir du seul noyau arithmétique (5), c'est-à-dire des seuls nombres premiers, du pôle et de la fonction digamma, la construction restitue trente-six zéros de ζ , les six premiers à 10^{-6} en relatif, avec des masses égales à 2,0002 sur les douze premiers. Poussée en précision arbitraire — tir en série de Taylor, la solution régulière étant analytique au point singulier intérieur, avec un pas géométrique contrôlant la branche parasite — elle donne les valeurs de la table 2, dont dix-neuf décimales correctes pour γ_1 , en trente-huit secondes de calcul.

Il faut lire ce résultat avec exactitude. Les valeurs $\hat{\gamma}_n$ ne sont pas des *découvertes* : la formule explicite contient déjà les zéros, et la chaîne les en extrait. Ce que ces chiffres établissent est la fidélité de l'objet construit et de ses instruments — que la corde habillée soit calculable de bout en bout depuis l'arithmétique, avec une loi d'erreur mesurée : l'erreur de position suit linéairement son plancher de tolérance dominant, le noyau n'entrant qu'au carré, par blindage variationnel, tandis que les masses, résidus du premier ordre, sont linéaires en tout. Cette loi a été validée sur onze ordres de grandeur.

Reste une question, ouverte, et qui touche à la limite. Le théorème 9.1 garantit la solvabilité à toute troncature finie, mais ne dit rien de l'uniformité. La marge de solvabilité mesurée décroît vers zéro selon une loi de puissance, $\lambda_{\min} \approx 1,40 \sigma^{-0,630}$ sur près d'une décade en σ , avec un exposant stable à $\pm 0,015$ sur sept fenêtres emboîtées ; mais la pente locale, suivie au-delà, ondule sans se stabiliser, passant par un maximum voisin de $-0,66$ avant de redescendre. Trois lectures restent compatibles avec les données : une oscillation amortie autour d'une asymptote véritable en $-\frac{2}{3}$, un exposant effectif stable voisin de $-0,63$, ou l'absence de toute loi de puissance unique, plusieurs échelles se mêlant à mesure que de nouveaux modes deviennent actifs. Ce point n'est pas tranché. Ce qui subsiste, indépendamment de la valeur exacte de l'exposant, est l'énoncé structurel : *la corde habillée existe comme limite d'opérateurs à marge évanescence* — constructible à toute résolution finie, singulière à la limite.

10 Conclusion et problèmes ouverts

Les deux voies parcourues ici ne franchissent pas le seuil (1), et il convient de le dire sans détour. La première établit au contraire un plafond : la chaîne de majorants de Boas–Kac modulés, à fenêtre libre et majorant optimal, converge vers la valeur du record par en dessous. Ce résultat négatif a une valeur propre, celle d'écarter une famille entière de tentatives et de désigner ce qui bloque réellement — non pas une minoration du facteur de forme au-delà de la bande, qui est un théorème acquis, mais le défaut terme

à terme de la domination, affecté du poids $X^{2\lambda y}$ par paire hors droite. Le seul régime où une telle lecture est connue pour survivre étant la boîte fine de [24], une stratégie naturelle consiste à démontrer une lecture à bande élargie conditionnellement à cette localisation, puis à attaquer la localisation elle-même. Notons également que l'uniformité observée du plafond en δ et en la fenêtre suggère un énoncé plus fort, qui serait un théorème : que la valeur 0,6725007 soit extrême non seulement pour le certificat à deux traces de bande 1, mais pour la clôture de sa classe sous les lectures élargies considérées.

La seconde voie ne dit rien de la proportion, mais construit un objet. Elle établit que les paires hors droite sont des états liés positifs d'un spectre étendu, que la corde des zéros existe inconditionnellement, que l'hypothèse de Riemann s'y lit comme la positivité d'une reconstruction arithmétique — soit, de façon équivalente, comme la pureté du spectre — et que l'opérateur prolate en fournit la classe ultraviolette exacte, spectre et poids, ces derniers par le théorème 8.1. Le théorème 8.2 montre que le passage de cette classe à la corde des zéros ne peut être algébrique et fini; la section 9 montre qu'il est effectivement réalisable par un habillage arithmétique, et le mesure. Le problème ouvert central de cette voie est la construction de la corde arithmétique avec la finesse nécessaire pour tester, et non seulement énoncer, l'équivalence de la section 6; le comportement asymptotique de la marge de solvabilité en est l'obstacle quantitatif immédiat.

Ces deux voies sont, en l'état, disjointes par leurs méthodes comme par ce qu'elles établissent. Il n'est pas exclu que leurs obstructions ne fassent qu'une : le défaut terme à terme de la première et la marge évanescence de la seconde portent l'un et l'autre sur le contrôle des configurations hors droite à profondeur exponentiellement pondérée. Déterminer s'il s'agit du même objet nous paraît la question la plus intéressante que ce travail laisse ouverte. Mentionnons enfin une direction voisine, non développée ici : la transposition du certificat à deux traces à une moyenne de famille, où l'orthogonalité restaure une bande normalisée et où la seule étape de saveur riemannienne subsistante est, là encore, une positivité terme à terme que la lecture par inertie pourrait remplacer.

Remerciements

L'auteur remercie les auteurs des travaux [1, 23, 24] et [13, 14], dont les résultats constituent le socle analytique et spectral de ce qui précède.

Références

- [1] S. Baluyot, D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, C. L. Turnage-Butterbaugh, *An unconditional Montgomery theorem for pair correlation of zeros of the Riemann zeta function*, Acta Arith. **214** (2024), 357–376.
- [2] C. Berg, J. P. R. Christensen, P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, Graduate Texts in Mathematics **100**, Springer, 1984.
- [3] M. V. Berry, J. P. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*, SIAM Rev. **41** (1999), 236–266.
- [4] R. P. Boas, M. Kac, *Inequalities for Fourier transforms of positive functions*, Duke Math. J. **12** (1945), 189–206.
- [5] E. Bombieri, *Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers, I*, Atti Accad. Naz. Lincei **11** (2000), 183–233.
- [6] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, 1968.
- [7] H. M. Bui, B. Conrey, M. P. Young, *More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line*, Acta Arith. **150** (2011), 35–64.
- [8] H. M. Bui, D. R. Heath-Brown, *On simple zeros of the Riemann zeta-function*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), 953–961.
- [9] E. Carneiro, V. Chandee, F. Littmann, M. B. Milinovich, *Hilbert spaces and the pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function*, J. reine angew. Math. **725** (2017), 143–182.
- [10] A. Y. Cheer, D. A. Goldston, *Simple zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 365–372.
- [11] A. Chirre, F. Gonçalves, D. de Laat, *Pair correlation estimates for the zeros of the zeta function via semidefinite programming*, Adv. Math. **361** (2020), 106926.
- [12] Claude (Anthropic), *More than two thirds of the zeros of the Riemann zeta function lie on the critical line*, arXiv :2608.13637 (2026).
- [13] A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **119** (2022), e2123174119; *Prolate spheroidal operator and zeta*, arXiv :2112.05500.

- [14] A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta zeros and prolate wave operators*, Ann. Funct. Anal. **15** (2024), art. 87; arXiv :2310.18423.
- [15] J. B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. reine angew. Math. **399** (1989), 1–26.
- [16] J. B. Conrey, A. Ghosh, S. M. Gonek, *Simple zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Lond. Math. Soc. **76** (1998), 497–522.
- [17] H. Dym, H. P. McKean, *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem*, Academic Press, 1976.
- [18] D. W. Farmer, S. M. Gonek, *Pair correlation of the zeros of the derivative of the Riemann ξ -function*, arXiv :0803.0425; voir aussi D. W. Farmer, S. M. Gonek, Y. Lee, J. Lond. Math. Soc. **90** (2014), 241–269.
- [19] S. Feng, *Zeros of the Riemann zeta function on the critical line*, J. Number Theory **132** (2012), 511–542.
- [20] I. M. Gel’fand, B. M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR **15** (1951), 309–360.
- [21] F. Gesztesy, G. Teschl, *On the double commutation method*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1831–1840.
- [22] D. A. Goldston, H. L. Montgomery, *Pair correlation of zeros and primes in short intervals*, dans : *Analytic Number Theory and Diophantine Problems*, Birkhäuser, 1987, 183–203.
- [23] D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, *Zeta zeros on the critical line*, arXiv :2511.20059 (2025).
- [24] D. A. Goldston, A. I. Suriajaya, *Zeta zeros in a narrow vertical box*, arXiv :2603.28104 (2026).
- [25] L. Guth, J. Maynard, *New large value estimates for Dirichlet polynomials*, arXiv :2405.20552 (2024).
- [26] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1012–1014.
- [27] A. Klein, L. J. Landau, *Construction of a unique self-adjoint generator for a symmetric local semigroup*, J. Funct. Anal. **44** (1981), 121–137.
- [28] M. G. Kreĭn, H. Langer, *Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen*, Math. Nachr. **77** (1977), 187–236.
- [29] N. Levinson, *More than one third of zeros of Riemann’s zeta-function are on $\sigma = 1/2$* , Adv. Math. **13** (1974), 383–436.
- [30] K. Matomäki, M. Radziwiłł, T. Tao, *Correlations of the von Mangoldt and higher divisor functions II*, Math. Ann. **374** (2019), 793–840.
- [31] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, Proc. Sympos. Pure Math. **24** (1973), 181–193.
- [32] H. L. Montgomery, *Distribution of the zeros of the Riemann zeta function*, dans : *Proceedings ICM Vancouver 1974*, vol. 1, 379–381.
- [33] A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. **48** (1987), 273–308.
- [34] F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, 1974.
- [35] K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler, *More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line*, Res. Math. Sci. **7** (2020), art. 2.
- [36] B. Rodgers, T. Tao, *The de Bruijn–Newman constant is non-negative*, Forum Math. Pi **8** (2020), e6.
- [37] A. Selberg, *On the zeros of Riemann’s zeta-function*, Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo I (1942), no. 10.
- [38] J. D. Vaaler, *Some extremal functions in Fourier analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 183–216.
- [39] A. Weil, *Sur les « formules explicites » de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sémin. Math. Univ. Lund (1952), 252–265.
- [40] X. Wu, *Distinct zeros of the Riemann zeta-function*, Quart. J. Math. **66** (2015), 759–771.